

# Chương 3: Dãy số - Cấp số cộng – Cấp số nhân

## §3. CẤP SỐ CỘNG

### A. GIÁO KHOA

#### 1. Định nghĩa

Cấp số cộng là một dãy số (hữu hạn hay vô hạn) mà trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tổng của số hạng đứng ngay trước nó và một số  $d$  không đổi.

$$(u_n) \text{ là cấp số cộng } \Leftrightarrow u_{n+1} = u_n + d, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$u_1$ : số hạng đầu của cấp số cộng

$d$ : công sai của cấp số cộng.

**Lưu ý:** Cho cấp số cộng  $(u_n)$  có công sai  $d$ . Khi đó:

- + Nếu  $d > 0$  thì  $(u_n)$  là một dãy số tăng, tức là  $u_1 < u_2 < u_3 < \dots$
- + Nếu  $d = 0$  thì  $(u_n)$  là một dãy số không đổi, tức là  $u_1 = u_2 = u_3 = \dots$
- + Nếu  $d < 0$  thì  $(u_n)$  là một dãy số giảm, tức là  $u_1 > u_2 > u_3 > \dots$

#### 2. Các công thức

Cho cấp số cộng  $(u_n)$  có số hạng đầu  $u_1$  và công sai  $d$ . Khi đó:

- Số hạng tổng quát:  $u_n = u_1 + (n-1)d$
- Tổng của  $n$  số hạng đầu tiên:  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n) = \frac{n}{2}[2u_1 + (n-1)d]$
- $u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$  với  $k \geq 2$

#### Lưu ý:

- + Ba số  $a, b, c$  lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi  $a + c = 2b$
- + Cấp số cộng 3 số hạng có dạng:  $a - t, a, a + t$
- + Cấp số cộng 4 số hạng có dạng:  $a - 3t, a - t, a + t, a + 3t$
- + Cấp số cộng 5 số hạng có dạng:  $a - 2t, a - t, a, a + t, a + 2t$

### B. VÍ DỤ

**Ví dụ 1.** Cho dãy số  $(u_n)$  với  $u_n = 11 - 10n$ .

- a) Viết 5 số hạng đầu của dãy.
- b) Chứng minh dãy số  $(u_n)$  là cấp số cộng. Chỉ rõ  $u_1$  và  $d$ .

**Lời giải:**

- a) 5 số hạng đầu của dãy là  $1, -9, 19, -29, -39$ .
- b) Xét hiệu  $u_{n+1} - u_n = 11 - 10(n+1) - (11 - 10n) = -10$ .

Do đó  $u_{n+1} = u_n - 10, \forall n \in \mathbb{N}^*$ , suy ra dãy số  $(u_n)$  là cấp số cộng với  $u_1 = 1; d = -10$ .

**Ví dụ 2.** Tính số hạng đầu  $u_1$  và công sai  $d$  của một cấp số cộng biết  $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_1 + u_6 = 17 \end{cases}$

**Lời giải:**

$$\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_1 + u_6 = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 - (u_1 + 2d) + u_1 + 4d = 10 \\ u_1 + u_1 + 5d = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 + 2d = 10 \\ 2u_1 + 5d = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 16 \\ d = -3 \end{cases}$$

**Ví dụ 3.** Tính số hạng đầu  $u_1$  và công sai  $d$  của một cấp số cộng biết  $\begin{cases} u_7 + u_{15} = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170 \end{cases}$

**Lời giải:**

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_7 + u_{15} = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} u_1 + 6d + u_1 + 14d = 60 \\ (u_1 + 3d)^2 + (u_1 + 11d)^2 = 1170 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 30 - 10d \\ (30 - 7d)^2 + (30 + d)^2 = 1170 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} u_1 = 30 - 10d \\ 1800 + 50d^2 - 360d = 1170 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 30 - 10d \\ d = 4, 2 \\ u_1 = 30 - 10d \\ d = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = -12; d = 4, 2 \\ u_1 = 0; d = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

**Ví dụ 4:** Chu vi của một đa giác là 45 cm, số đo các cạnh của nó lập thành một cấp số cộng với công sai  $d = 3\text{ cm}$ . Biết cạnh lớn nhất là 15 cm, tính số cạnh của đa giác đó.

**Lời giải:**

Gọi cạnh nhỏ nhất của đa giác là  $u_1$  và số cạnh của đa giác là  $n$ .

Ta có  $15 = u_1 + (n-1) \cdot 3$  hay  $u_1 = 18 - 3n > 0 \rightarrow n < 6$ .

Tổng các cạnh (tức là chu vi đa giác) là 45 cm, ta có

$$45 = \frac{n(15 + 18 - 3n)}{2} \text{ hay } 3n^2 - 33n + 90 = 0.$$

Giải phương trình với  $n \in \mathbb{N}^*$ ;  $n < 6$ , ta được  $n = 5$ .

**Ví dụ 5:** Khi ký hợp đồng dài hạn (10 năm) với các công nhân được tuyển dụng. Công ty liên doanh D đề xuất hai phương án trả lương để người lao động chọn, đó là

- **PA1.** Người lao động sẽ nhận 36 triệu đồng cho năm làm việc đầu tiên và kể từ năm thứ hai, mức lương sẽ được tăng thêm 3 triệu đồng mỗi năm.
- **PA2.** Người lao động sẽ nhận được 7 triệu đồng cho quý đầu tiên và kể từ quý làm việc thứ hai mức lương sẽ tăng thêm 500.000 đồng mỗi quý.

Nếu bạn là người lao động, bạn sẽ chọn phương án nào?

**Lời giải:**

Kí hiệu  $X$  là người lao động. xét mỗi phương án mà công ty đưa ra, ta có:

- **PA1.** Năm thứ nhất, X nhận được 36 triệu đồng, tức là  $u_1 = 36$ .

Năm thứ hai, X nhận được  $36+3=39$  triệu đồng, tức là  $u_2 = 39$ .

Khi đó, số tiền lương mà X nhận được chính là cấp số cộng với  $u_1 = 36, d = 3$ .

Do đó, tổng số tiền X nhận được sau 10 năm là  $S_{10} = 5 \cdot (2u_1 + 9d) = 495$  triệu đồng.

- **PA2.** Quý đầu tiên, X nhận được 7 triệu đồng, tức là  $u_1 = 7$ .

Sang quý thứ hai, X nhận được  $7+0,5=7,5$  triệu đồng, tức là  $u_2 = 7,5$ .

Khi đó, số tiền lương mà X nhận được chính là cấp số cộng với  $u_1 = 7, d = 0,5$

Do đó, tổng số tiền X nhận được sau 10 năm là  $S_{40} = 20 \cdot (2u_1 + 39d) = 670$  triệu đồng.

Vậy ta thấy nếu kí hợp đồng theo PA2 thì số tiền lương nhận được sẽ cao hơn và chắc chắn ta sẽ chọn PA2.